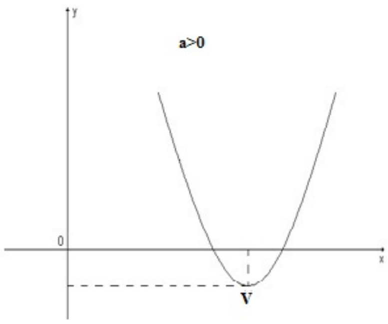
Funcţia de gradul al doilea. Numere complexe. Progresii

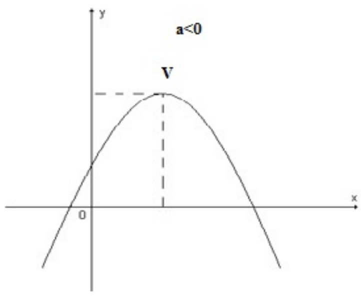
1. Noţiuni teoretice

Funcţia de gradul al doilea

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

- Graficul funcţiei de gradul al II-lea este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Graficul funcţiei de gradul al II-lea are axa de simetrie dreapta $x = -\frac{b}{2a}$.
- Dacă $a < 0$ funcţia admite un maxim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ in $x = -\frac{b}{2a}$.
- Dacă $a > 0$ funcţia admite un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ in $x = -\frac{b}{2a}$.





Poziţia rădăcinilor ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, \Delta \geq 0,\ x_1, x_2$ rădăcinile, $\alpha \in \mathbb{R}$ dat:

1. $x_1 < \alpha,\ x_2 < \alpha$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases}$$

2. $x_1 > \alpha,\ x_2 > \alpha$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \alpha \end{cases}$$

3. $x_1 < \alpha < x_2$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) < 0 \end{cases}$$

- Pentru a impune ca o funcţie de gradul II sa aibă o singură rădăcină intre α_1 si α_2 este suficientă condiţia $f(\alpha_1)f(\alpha_2) < 0$.

- Poziţia rădăcinilor faţă de 2 numere date α_1 şi α_2 : $x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha_1) < 0 \\ af(\alpha_2) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha_2 \end{cases}$$

Numere complexe
$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ forma algebrică a numarului complex
$\overline{z} = x - iy$ conjugatul lui z
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ modulul lui z
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ forma trigonomatrică, unde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este raza polară şi $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x} + k\pi$ este argumentul redus al lui z,

$$k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } z \text{ este in CI} \\ 1, & \text{dacă } z \text{ este in CII sau CIII} \\ 2, & \text{dacă } z \text{ este in CIV} \end{cases}$$

Fie $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Atunci

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \\ z^n &= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \end{aligned}$$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}$ radacinile de ordin n ale lui z

Progresii aritmetice şi progresii geometrice
Spunem ca şirul de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o progresie aritmetică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $a_{k+1} = a_k + r$, unde r este un număr constant, $r \neq 0$, numit raţie.

- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

- $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1$
- $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \geq 2$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice)

Spunem că şirul de numere $b_1, b_2, \ldots, b_n$ este o progresie geometrica, dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $b_{k+1} = b_k q$, unde q este un număr constant, $q \neq 0$, numit raţie.

- $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}, \forall n \geq 2$
- $b_n = b_1 q^{n-1}, \forall n \geq 1$
- $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1, \forall n \geq 1$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ (suma primilor n termeni ai progresiei geometrice)

2. Probleme

Condiţia ca ecuaţia de gradul al II-lea să aibă rădăcini reale: $\Delta \geq 0$

Problema 14. Fie funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1,\ m \in \mathbb{R}$.

Mulţimea valorilor parametrului m pentru care ecuaţia $f_m(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină reală este:

A) $(-\infty, 1)$ B) $(-\infty, 1]$ C) $\mathbb{R}$ D) alt răspuns E) $[0, \infty)$.

Rezolvare:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4(m^2 - 2m + 1) - 4m^2 + 4m \geq 0$$

$$-4m + 4 \geq 0$$

Deci $m \leq 1$ şi avem răspunsul B) $m \in (-\infty, 1]$.

Problema 86. Ecuaţia $x^4 + (2m-1)x^2 + 2m + 2 = 0$, cu necunoscuta x şi parametrul real m, are toate rădăcinile reale dacă:

A) $m = 0$ B) $1 \leq m \leq 2$ C) $-1 \leq m \leq -1/2$ D) $m \in \emptyset$ E) $m > 1/2$.

Rezolvare: Facem substituţia $x^2 = t$ şi ecuaţia devine

$$t^2 + (2m-1)t^2 + 2m + 2 = 0.$$

Pentru ca toate rădăcinile sa fie reale avem următoarele condiţii: $\Delta \geq 0$ şi

$$\begin{cases} t_1 \geq 0 \\ t_2 \geq 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Din $\Delta \geq 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4(2m+2) \geq 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m - 7 \geq 0$. Soluţia inecuaţiei este $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}, \infty)$.

Din relaţia (1) $\Rightarrow \begin{cases} -2m+1 \geq 0 \\ 2m+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -1 \end{cases} \Rightarrow m \in [-1, \frac{1}{2}]$.

Soluţia problemei se obţine intersectând cele două soluţii: C) $m \in [-1, -\frac{1}{2}]$.

Semnul funcţiei de gradul al II-lea

Problemele 8, 9, 10.

Se da funcţia $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1$, unde $m \neq 0$ este parametru real.

Problema 8 Pentru ce valori ale lui m, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A) $m \in (0, +\infty)$ B) $m \in (1+\sqrt{2}, +\infty)$ C) $m \in (0, 1+\sqrt{2})$ D) $m \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ E) $m \in (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$

Rezolvare:

Punem condiţiile:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

Din prima inecuaţie obţinem

$$\begin{aligned} 4(m^2 + 2m + 1) - 4m(m^2 - 1) &< 0 \\ -m^3 + m^2 + 3m + 1 &< 0 \\ (m+1)(-m^2 + 2m + 1) &< 0 \end{aligned}$$

Deci $m \in (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$.

Din $m > 0 \Rightarrow m \in (0, \infty)$. Intersectând cele doua soluţii obţinem B) $m \in (1+\sqrt{2}, +\infty)$.

Problema 9 Pentru ce valori ale lui m, $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A) $m \in (-\infty, 0)$ B) $m \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ C) $m \in (-1, 1-\sqrt{2})$ D) $m \in (-\infty, 1-\sqrt{2})$ E) $m \in (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (0, \infty)$

Rezolvare:

Punem condiţiile:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

Din $\Delta < 0$ obţinem $m \in (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty)$. Din $m < 0$ obţinem $m \in (-\infty, 0)$.

Prin intersecţie avem C) $m \in (-1, 1-\sqrt{2})$.

Problema 10 Pentru ce valori ale lui m funcţia admite rădăcina dublă?

A) $m \in \{\pm 1\}$ B) $m \in \{1, \pm\sqrt{2}\}$ C) $m \in \{\pm\sqrt{2}\}$ D) $m \in \{-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$ E) $m \in \{0, 1, \pm\sqrt{2}\}$

Rezolvare:

Punem condiţiile: $m \neq 0$ şi $\Delta = 0$. Deci răspunsul este D) $m \in \{-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$.

Problema 83 Fie $E(x) = \dfrac{x^2 - 2(m-1)x + m + 1}{mx^2 - mx + 1}$. Mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care E este bine definită oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, este:

A) $\mathbb{R}$ B) $\{4\}$ C) $\{-1\}$ D) $(0, 4)$ E) alt răspuns

Rezolvare:

Expresia de la numitor trebuie sa fie diferită de 0 şi atunci avem pentru ecuaţia $mx^2 - mx + 1 = 0$ condiţia $\Delta < 0$ din care obţinem $m^2 - 4m < 0 \Rightarrow m \in (0, 4)$.

Dar observam că pentru $m = 0$ expresia de la numitor este diferită de 0. Atunci soluţia de mai sus o reunim cu $\{0\}$.

Atunci avem $m \in (0, 4) \cup \{0\}$ şi obţinem $m \in [0, 4)$. Deci raspunsul este E) alt răspuns.

Problema 208 Imaginea functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}$, $a \in \mathbb{R}$, este inclusa in intervalul $[0, 2]$, dacă

A) $a \geq 3$ B) $a \leq -2$ C) $a \in [-1, 0)$ D) $a \in [0, 2]$ E) $a \in (-2, -1)$

Rezolvare:

$$0 \leq \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + ax + 1 - 2x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} \leq 0 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \geq 0. \end{cases}$$

Deoarece $x^2 + x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x^2 + (2-1)x + 1 \geq 0 \\ x^2 + ax + 1 \geq 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} \Delta_1 = (2-a)^2 - 4 \leq 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4a \leq 0 \\ a^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [0, 2]$. Deci răspunsul este D).

Problemele 75, 76 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - (m-1)x + 3m - 4,\ m \in \mathbb{R}.$$

75 Mulţimea valorilor lui m pentru care f se anulează in $(0,1)$ şi $f(x) \geq 0, \forall x \in (0,1)$ este:

A) $(-\infty, 7-4\sqrt{2})$ B) $(7+4\sqrt{2}, \infty)$ C) $\{7-4\sqrt{2}, 7+4\sqrt{2}\}$ D) $\{7-4\sqrt{2}\}$ E) $\emptyset$

Rezolvare:

f se anuleaza in $(0,1)$ dacă exista cel putin un punct $x_0 \in (0,1)$ astfel incat $f(x_0) = 0$. Pentru ca $f(x) \geq 0, \forall x \in (0,1)$ inseamna ca vârful parabolei asociate se afla pe axa OX.

Deci $\Delta = 0$. Obţinem $m^2 - 14m + 17 = 0$ şi $\Delta_m = 128 \Rightarrow m_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{2}$.

Varful parabolei are coordonatele $x_V = \frac{-b}{2a}$, $y_V = 0$. Punem conditia $x_V \in (0,1)$.

Soluţia $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{m-1}{2}$. Pentru $m_1 = 7 + 4\sqrt{2}$ obţinem $x_V = 3 + 2\sqrt{2} > 1$, deci $x_V \notin (0,1)$.

Pentru $m_2 = 7 + 4\sqrt{2}$ obţinem $x_V = 3 - 2\sqrt{2} \in (0,1)$. Deci răspunsul este D) $\{7 - 4\sqrt{2}\}$.

76 Mulţimea valorilor lui m pentru care $f(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ este

A) $(0,1)$ B) $(2,\infty)$ C) $(-\infty, 1]$ D) ϕ E) $(0,\infty)$

Rezolvare: Pentru ca f are semn contrar lui a pe intervalul $(0,1)$ rezulta ca f taie axa OX in doua puncte: x_1 si x_2. Ne convine doar cazul $x_1 \leq 0$ si $x_2 \geq 1$. Dar in acest caz $f(x) < 0$, $\forall x \in (0,1)$. Trebuie să punem condiţiile:

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$$

Deci $m \leq \frac{4}{3}$ şi $m \leq 1$ şi obţinem soluţia C) $(-\infty, 1]$.

Relaţiile lui Viete

Problemele 11, 12, 13

Se consideră ecuaţia $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$, iar x_1 şi x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuaţiei.

11 Suma rădăcinilor $x_1 + x_2$ aparţine intervalului

A) $[0,1]$ B) $[0,4]$ C) $\mathbb{R}$ D) $[0,2]$ E) $[-1,4]$

Rezolvare:

Pentru a avea două rădăcini reale avem condiţia $\Delta \geq 0 \Rightarrow -4m^2 + 16m \geq 0$. Deci B) $m \in [0,4]$.

12 Suma pătratelor rădăcinilor $x_1^2 + x_2^2$ aparţine intervalului

A) $[0,4]$ B) $[-2,4]$ C) $[0,8]$ D) $\mathbb{R}$ E) $[0,3]$

Rezolvare:

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = m^2 - (m^2 - 2m) = 2m$.

Din problema de mai sus avem ca $m \in [0,4] \Rightarrow 2m \in [0,8]$. Deci răspunsul este C) $[0,8]$.

13 Produsul rădăcinilor x_1x_2 aparţine intervalului

A) $[-2,0]$ B) $[0,4]$ C) $[-1/2,4]$ D) $\mathbb{R}$ E) $(0,2)$

Rezolvare:

$x_1x_2 = \dfrac{m^2-2m}{2} = \frac{1}{2}m^2 - m$. Trebuie gasit minimul si maximul expresiei $\frac{1}{2}m^2 - m$.

Notăm $f : [0,4] \to \mathbb{R},\ \ f(m) = \frac{1}{2}m^2 - m$. Minimul este atins in varf $y_V = \frac{-\Delta_m}{4\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$, pentru ca $x_V = 1 \in [0,4]$.

Calculăm $f(0) = 0, f(1) = -\frac{1}{2}$ şi $f(4) = 4$. Varful parabolei este $V(-\frac{1}{2},1)$.Deci $\frac{1}{2}m^2 - m \in [-1/2,4]$.

Răspunsul este C) $[-1/2,4]$.

Problemele 812, 813, 814

Se considera functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2$, unde m este un parametru real, $m \neq -\dfrac{1}{2}$.

812 Ecuatia $f(x) = 0$ are o unica solutie daca si numai daca m apartine multimii:

A) $\{-1,2\}$ B) $\{-1,1\}$ C) $\{-2,2\}$ D) $\{-2,1\}$ E) $\{0,1\}$

$\Delta = 0 \Rightarrow 4(m+2)^2 - 4(2m+1)(m+2) = 0$

$4(m+2)(-m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 1$. Deci raspunsul este D)

813 Funcţia f admite un minim global negativ dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii:

A) $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ B) $[-1,2)$ C) $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$ D) $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$ E) $(-\infty,-\dfrac{1}{2}) \cup (1,\infty)$.

$$\begin{cases} 2m+1>0 \\ y_v<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+1>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+1>0 \\ \dfrac{4(m+2)(m-1)}{4(2m+1)}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>-\frac{1}{2} \\ m\in(-\infty,-2)\cup(-\dfrac{1}{2},1). \end{cases}$$

Deci $m \in \left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ şi răspunsul este A).

814 Soluţiile reale x_1, x_2 ale ecuatiei $f(x) = 0$ verifica $x_1 < 2$ şi $x_2 > 2$ dacă şi numai dacă m apartine mulţimii:

A) $\left(0,\frac{2}{5}\right)$ B) $[-\frac{1}{3},\frac{2}{5})$ C) $\left(-\dfrac{1}{2},\frac{2}{5}\right]$ D) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5}\right)$ E) $\mathbb{R}$.

Din $x_1 < 2$ şi $x_2 > 2$, obţinem

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ af(2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+2)(-m+1)>0 \\ (2m+1)(5m-2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in(-2,1) \\ m\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5}\right) \end{cases}$$

Deci $m \in \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5}\right)$ şi răspunsul este D).

Problema 734

Se considera familia de funcţii $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = x^2 - (4m+3)x + 4m + 2, m \in \mathbb{R}$.

Punctul din plan prin care trec toate graficele funcţiilor f_m este situat pe:

A) axa Oy B) axa Ox C) prima bisectoare D) a doua bisectoare E) alt raspuns

Rezolvare:

Fie $M(x_0, y_0)$ punctul prin care trec parabolele. Atunci

$$x_0^2 - (4m+3)x_0 + 4m + 2 = y_0.$$

Ordonând dupa puterile lui m obţinem

$$m(-4x_0 + 4) + x_0^2 - 3x_0 + 2 - y_0 = 0.$$

Pentru $m = 0 \Rightarrow x_0^2 - 3x_0 + 2 - y_0 = 0$ si $m(-4x_0 + 4) = 0, \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$-4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$

$x_0^2 - 3x_0 + 2 - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

Deci am obtinut $M(1, 0) \in Ox$ şi răspunsul corect este B).

Problema 15.

Fie funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1,\ m \in \mathbb{R}$.

Varfurile parabolelor asociate funcţiilor $f_m,\ m \neq 0$, se gasesc pe:

A) parabola $y = x^2 + 2$ B) dreapta $x + 2y = 0$ C) dreapta $y = x$ D) dreapta $y = -x$ D) o paralela la Ox.

Rezolvare:

Calculam varful parabolei: $V\left(-\dfrac{m-1}{m}, \dfrac{m-1}{m}\right)$.

Deci $-x_V = y_V$ si varful se afla pe dreapta $y = -x$. Rąspunsul este D).

Numere complexe

Egalitatea a doua numere complexe

Problema 142 Ecuaţia $x^3 - (4-i)x^2 - (1+i)x + a = 0,\ a \in \mathbb{R}$, are o rădăcina reală dacă şi numai dacă a aparţine mulţimii:

A) $\{1, 2\}$ B) $\{0, 1\}$ C) $\{-1, 4\}$ D) $\{0, 4\}$ E) $\mathbb{R}$

Rezolvare:

Fie x rădăcina reala a ecuaţiei. Atunci $x^3 - (4-i)x^2 - (1+i)x + a = 0$ şi $x^3 - 4x^2 - x + a + i(x^2 - x) = 0$.

Cum $x \in \mathbb{R}$ obtinem $x^2 - x = 0$ şi obţinem $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. Pentru $x_1 = 0$ avem $a_1 = 0$ şi pentru $x_2 = 1$ avem $a_2 = 4$. Deci raspunsul este D) $\{0, 4\}$.

Problema 21 Să se găseasca numarul complex z dacă $|z| - z = 1 + 2i$.

A) $z = \frac{3}{2} - 2i$ B) $z = \frac{3}{2} + 2i$ C) $z = \frac{1}{2} - 3i$ D) $z = \frac{1}{2} + 3i$ E) $z = -\frac{1}{2} + 3i$

Rezolvare:

Fie $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ un număr complex. Inlocuim in ecuaţie şi obţinem

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i.$$

Deci

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Obţinem $x=\frac{3}{2}$ şi $y=-2$, deci raspunsul este A) $z=\frac{3}{2}-2i$.

Conjugatul numărului complex

Problemele 166, 167, 168
Fie numărul complex $z=1+i$.
166 Numărul complex $\dfrac{1}{z}$ este:
A) $-1-i$ B) $1-i$ C) $\frac{1-i}{2}$ D) $\frac{1+i}{2}$ E) Alt răspuns

Rezolvare:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$$

Deci răspunsul este C) $\frac{1-i}{2}$.

167 Dacă z^n este real, pentru o anume valoare $n\in\mathbb{N}^*$, atunci numărul complex z^{2n} este:
A) i^n B) -1 C) 1 D) 2^n E) $\left(\sqrt{2}\right)^n$

Rezolvare:

$$z^n=\overline{z}^n \Rightarrow \frac{z^n}{\overline{z}^n}=1 \Rightarrow \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^n=1.$$

Amplificăm cu z şi folosim $z\overline{z}=2$ obţinem $\left(\dfrac{z^2}{2}\right)^n=1$. Deci $z^{2n}=2^n$ şi răspunsul este D) 2^n.
168 Fie $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Dacă $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ şi $|z_1|=|z_2|=1$, atunci $|z_1-z_2|$ este:
A) 2 B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}-1$.

Rezolvare: Folosim identitatea paralelogramului

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2+|z_1-z_2|^2=4$$

Deci $|z_1-z_2|=1$ şi răspunsul este B) 1.

Problema 657 Cate radacini complexe are ecuaţia $z^{n-1}=i\overline{z},\ n>2,\ n\in\mathbb{N}$?
A) $n-2$ B) $n-1$ C) n D) $n+1$ E) $n+2$.

Rezolvare:
Trecem la module $\Rightarrow |z|^{n-1}=|i|\,|\overline{z}|=|z|$.
Deci $|z|^{n-1}-|z|=0 \Rightarrow |z|\left(|z|^{n-2}-1\right)=0$.

1) $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ verifică ecuaţia iniţiala

2) $|z| \neq 0 \Rightarrow |z|^{n-2} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Inmulţim ecuaţia iniţială cu $z \neq 0$ şi avem

$$z^n = i\bar{z}z = i\,|z|^2 = i \cdot 1 = i$$

Ecuaţia binomă $z^n = i$ are n soluţii. Deci răspunsul este D) $n + 1$.

Progresii

Problema 141 O progresie aritmetică crescătoare $(a_n)_{n\geq 1}$ verifica relaţiile $a_9+a_{10}+a_{11} = 15$ si $a_9a_{10}a_{11} = 120$. Suma primilor 20 de termeni din progresie este:

A) 150 B) 100 C) 120 D) 110 E) 160.

Rezolvare:

Din $a_9 + a_{10} + a_{11} = 15 \Rightarrow a_{10} - r + a_{10} + a_{10} + r = 15 \Rightarrow a_{10} = 5.2$

Din $a_9a_{10}a_{11} = 120 \Rightarrow (a_{10} - r)\,a_{10}(a_{10} + r) = 120 \Rightarrow (5 - r)\,5(5 + r) = 120 \Rightarrow r^2 = 1$.

Deci $r = 1$, $S_{20} = 110$ şi răspunsul este D) 110.

Problema 218 Fie m, n, p numere naturale nenule, $m \neq n$. Dacă intr-o progresie aritmetică avem $a_n = m$, şi $a_m = n$, atunci a_p este egal cu:

A) $m + n - p$ B) $p - m - n$ C) $m + n - 2p$ D) $2p - m - n$ E) $m + n + p$.

Rezolvare:

Avem $a_n = a_1 + (n - 1)r$ şi $a_m = a_1 + (m - 1)r$. Scăzând cele două relaţii obţinem

$$a_n - a_m = (n - m)r \Rightarrow r = \frac{a_n - a_m}{n - m}.$$

Deci $r = \dfrac{m - n}{n - m} \Rightarrow r = -1$ şi putem afla a_1 :

$$a_n = a_1 + 1 - n \Rightarrow a_1 = m + n - 1.$$

Atunci $a_p = a_1 + (p - 1)(-1)$ şi $a_p = m + n - p$. Răspunsul este A) $m + n - p$.

Problema 34 Sa se determine primul termen a_1 şi ratia q a unei progresii geometrice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dacă:

$$\begin{cases} a_4 - a_2 = 6, \\ a_3 - a_1 = 3. \end{cases}$$

A) $a_1 = -1; q = 3$ B) $a_1 = 3; q = \frac{1}{2}$ C) $a_1 = 2; q = -2$ D) $a_1 = 1; q = 2$ E) $a_1 = 1; q = 3$.

Rezolvare:

$$a_4 - a_2 = a_1q^3 - a_1q = a_1q(q^2 - 1) = 6$$
$$a_3 - a_1 = a_1q^2 - a_1 = a_1(q^2 - 1) = 3$$

Prin impărţirea relaţiilor $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_1(2^2 - 1) = 3 \Rightarrow a_1 = 1$. Deci răspunsul este D) $a_1 = 1; q = 2$.